9ο online μάθημα 31/3/2020

Αφού ο ορισμός του κλειστού συνόλου δίνεται μέσω συμπληρώματος για την μελέτη των ιδιοτήτων των κλειστών συνόλων, χρησιμοποιούνται οι τύποι De Morgan, οι οποίοι αφορούν τα συμπληρώματα της τομής και της ένωσης μιας οικογένειας συνόλων.

Αν X είναι σύνολο και $(A_i)_{i\in I}$ οικογένεια υποσυνόλων του X τότε:

$$X\setminus\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)=\bigcup_{i\in I}(X\setminus A_i)$$

$$X\setminus\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)=\bigcap_{i\in I}(X\setminus A_i)$$

Η επόμενη πρόταση περιγράφει τις βασικές ιδιότητες των κλειστών συνόλων

Πρόταση Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος τότε
(i) Τα $\emptyset, X$ είναι κλειστά
(ii) Αν A,B κλειστά τότε το $A\cup B$ είναι κλειστό
(iii) Αν $(F_i)_{i\in I}$ είναι οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του X τότε το $\bigcap_{i\in I}F_i$ είναι κλειστό

Απόδειξη

Η απόδειξη στηρίζεται στις ιδιότητες των ανοικτών συνόλων και έχουμε δει σε προηγούμενη πρόταση

(i) X ανοικτό $\Rightarrow X\setminus X$ κλειστό $\Rightarrow \emptyset$ κλειστό
$\emptyset$ ανοικτό $\Rightarrow X\setminus\emptyset$ κλειστό $\Rightarrow X$ κλειστό

(ii) $$\left.\begin{array}{l}A \text{ κλειστό} \Rightarrow X\setminus A \text{ ανοικτό}\\ B \text{ κλειστό} \Rightarrow X\setminus B \text{ ανοικτό}\end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{(X\setminus A)\cap(X\setminus B)}_{=X\setminus(A\cup B)} \text{ ανοικτό}$$
$\Rightarrow$ το $A\cup B$ είναι κλειστό

(iii) Έστω $(F_i)_{i\in I}$ οικογένεια κλειστών
$\Rightarrow X\setminus F_i$ ανοικτό $\forall i\in I$
Άρα $\bigcup_{i\in I}(X\setminus F_i)$ ανοικτό

Όμως $\bigcup_{i\in I}(X\setminus F_i) = X\setminus \bigcap_{i\in I} F_i$ άρα $X\setminus\bigcap_{i\in I}F_i$ ανοικτό

δηλαδή $\bigcap_{i\in I} F_i$ είναι κλειστό

<u>Παρατήρηση</u> Από το (ii) προκύπτει άμεσα με επαγωγή ότι για κάθε $n\in\mathbb{N}$ αν $F_1,\dots,F_n$ είναι κλειστά τότε και το σύνολο $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$

Η προηγούμενη ιδιότητα δεν ισχύει γενικά για άπειρη οικογένεια συνόλων

Για παράδειγμα, έστω $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική το σύνολο $F_n=[0,5-\frac{1}{n}]$ είναι κλειστό για κάθε $n\in\mathbb{N}$, αλλά το σύνολο $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n=[0,5)$ δεν είναι κλειστό

[διότι το συμπλήρωμα του, που είναι το $(-\infty,0)\cup[5,+\infty)$ δεν είναι ανοικτό]

<u>Ορισμός</u> Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $A\subseteq X$. Ένα $x\in X$ θα λέγεται σημείο επαφής του A αν για κάθε $\varepsilon>0$ ισχύει $B_\rho(x,\varepsilon)\cap A\neq\emptyset$ (δηλαδή αν οσοδήποτε κοντά στο x υπάρχουν στοιχεία του A)

Η <u>κλειστή θήκη (ή κλειστότητα)</u> του A είναι το σύνολο των σημείων επαφής του A και συμβολίζεται με $\overline{A}$, $cl(A)$ [ή με $cl_\rho(A)$ αν θέλουμε να ξεκαθαρίσουμε σε ποια μετρική ρ αναφερόμαστε]

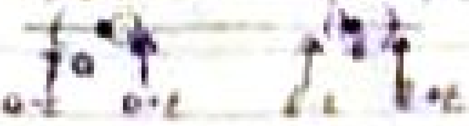
$\overline{A}=cl(A)=\{x\in X: \forall\varepsilon>0\ B_\rho(x,\varepsilon)\cap A\neq\emptyset\}$

<u>Παρατηρήσεις-παραδείγματα</u>

α) Αν $x\in A$ τότε προφανώς $x\in\overline{A}$ (αφού $\forall\varepsilon>0$ $x\in B_\rho(x,\varepsilon)\cap A$).

Αυτό που κάνει ενδιαφέροντα τον παραπάνω ορισμό είναι ότι ενδέχεται να ισχύει $x\in\overline{A}$ και για x που δεν ανήκουν A

β) Στο $\mathbb{R}$ θεωρούμε $a<b$ και το διάστημα (a,b). Τότε $a\in\overline{(a,b)}$ και $b\in\overline{(a,b)}$ επειδή για κάθε $\varepsilon>0$ $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)\cap(a,b)\neq\emptyset$ και $(b-\varepsilon,b+\varepsilon)\cap(a,b)\neq\emptyset$



Για $x<a$ έχουμε $x\notin\overline{(a,b)}$ [διότι για $\varepsilon=a-x$ έχουμε $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\cap(a,b)=\emptyset$]

Για $x>b$ έχουμε $x\notin\overline{(a,b)}$ [διότι για $\varepsilon=x-b$ έχουμε $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\cap(a,b)=\emptyset$]

επομένως $\overline{(a,b)}=[a,b]$

γ) $\overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$, διότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και κάθε $\varepsilon>0$ το διάστημα $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$ περιέχει και ρητούς και άρρητους

<u>Πρόταση</u> (Σύνδεση της έννοιας του εσωτερικού συνόλου με την έννοια της κλειστής θήκης συνόλου)

Έστω (X,ρ) μ.χ. Για κάθε $A\subseteq X$ ισχύει

$$(X\setminus A)^\circ = X\setminus\overline{A} \quad\text{και}\quad \overline{X\setminus A} = X\setminus A^\circ$$

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $A\subseteq X$. Για τυχόν $x\in X$ έχουμε

$$\begin{aligned} x\in X\setminus\overline{A} &\Leftrightarrow x\notin\overline{A} \\ &\Leftrightarrow \exists\varepsilon>0\ B_\rho(x,\varepsilon)\cap A=\emptyset \\ &\Leftrightarrow \exists\varepsilon>0\ B_\rho(x,\varepsilon)\subseteq X\setminus A \\ &\Leftrightarrow x\in(X\setminus A)^\circ \end{aligned}$$

συνεπώς $(X\setminus A)^\circ = X\setminus\overline{A}$

Η δεύτερη ισότητα προκύπτει άμεσα εφαρμόζοντας την πρώτη για το σύνολο $X\setminus A$

Πράγματι $(X\setminus(X\setminus A))^\circ = X\setminus\overline{(X\setminus A)} \Rightarrow A^\circ = X\setminus\overline{(X\setminus A)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{X\setminus A} = X\setminus A^\circ$

Δινουμε και μια αμεση αποδειξη. Για τυχον $x \in X$ εχουμε: $x \in X \setminus A^\circ \iff x \notin A^\circ$

$\iff \forall \varepsilon > 0 \ B_\rho(x,\varepsilon) \nsubseteq A$

$\iff \forall \varepsilon > 0 \ B_\rho(x,\varepsilon) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$

$\iff x \in \overline{X \setminus A}$

επομενως $\overline{X \setminus A} = X \setminus A^\circ$

Προταση: Εστω (X,ρ) μ.χ. και $A \subseteq X$
Η κλειστη θηκη $\overline{A}$ του A ειναι κλειστο συνολο

Αποδειξη:
Για να δ.ο. το $\overline{A}$ ειναι κλειστο αρκει να δ.ο. το $X \setminus \overline{A}$ ειναι ανοικτο. Εστω $x \in X \setminus \overline{A}$.
Αφου $x \notin \overline{A}$ υπαρχει $\varepsilon > 0$ ωστε $B_\rho(x,\varepsilon) \cap A = \emptyset$
Θα δειξουμε οτι $B_\rho(x,\varepsilon) \cap \overline{A} = \emptyset$ ή ισοδυναμα οτι $B_\rho(x,\varepsilon) \subseteq X \setminus \overline{A}$
Εστω $y \in B_\rho(x,\varepsilon)$.
Εφοσον η ανοιχτη μπαλα $B_\rho(x,\varepsilon)$ ειναι ανοικτο συνολο υπαρχει $\delta > 0$ ωστε $B_\rho(y,\delta) \subseteq B_\rho(x,\varepsilon)$
[Σημειωση: Απο την αποδειξη οτι το $B_\rho(x,\varepsilon)$ ειναι ανοικτο συνολο ενα τετοιο δ ειναι το $\delta = \varepsilon - \rho(y,x)$]
Εφοσον $B_\rho(x,\varepsilon) \cap A = \emptyset$ εχουμε οτι $B_\rho(y,\delta) \cap A = \emptyset$
και άρα $y \notin \overline{A}$ δηλαδη $y \in X \setminus \overline{A}$
Δειξαμε λοιπον οτι $B_\rho(x,\varepsilon) \subseteq X \setminus \overline{A}$
επομενως το $X \setminus \overline{A}$ ειναι ανοικτο άρα το $\overline{A}$ ειναι κλειστο

Προταση (Βασικες ιδιοτητες της κλειστης θηκης)
Εστω (X,ρ) μ.χ. και $A, B \subseteq X$

(i) $A \subseteq \overline{A}$

(ii) $\overline{A} = \bigcap \{F : F \text{ κλειστο στο } X, A \subseteq F\}$
Συνεπως το $\overline{A}$ ειναι κλειστο και μαλιστα το μικροτερο κλειστο που περιεχει το A

(iii) Αν $A \subseteq B$ τοτε $\overline{A} \subseteq \overline{B}$

(iv) Το A είναι κλειστό αν και μόνο αν $A=\overline{A}$

(v) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

<u>Απόδειξη</u>

(i) Όπως είπαμε πιο πάνω αν $x\in A$ τότε για κάθε $\varepsilon>0$ το σύνολο $B_\rho(x,\varepsilon)\cap A$ είναι μη κενό αφού περιέχει το σημείο x και άρα $x\in\overline{A}$, συνεπώς $A\subseteq\overline{A}$

(ii) Έστω $x\in\overline{A}$. Θεωρούμε τυχαίο κλειστό σύνολο F με $A\subseteq F$. Θα δείξουμε ότι $x\in F$.
Αν αυτό δεν ισχύει, δηλαδή αν $x\in X\setminus F$, τότε αφού το $X\setminus F$ είναι ανοιχτό (αφού F κλειστό), υπάρχει $\varepsilon>0$ ώστε $B_\rho(x,\varepsilon)\subseteq X\setminus F$, δηλαδή $B_\rho(x,\varepsilon)\cap F=\emptyset$. Εφόσον $A\subseteq F$ προκύπτει $B_\rho(x,\varepsilon)\cap A=\emptyset$, το οποίο άτοπο διότι $x\in\overline{A}$. Συνεπώς $x\in F$. Έτσι $\overline{A}\subseteq\bigcap\{F: F \text{ κλειστό ως και } A\subseteq F\}$
Αντίστροφα, έστω $x\in\bigcap\{F: F \text{ κλειστό}, A\subseteq F\}$.
Θα δείξουμε ότι $x\in\overline{A}$.
Έστω $\varepsilon>0$. Θα δείξουμε ότι $B_\rho(x,\varepsilon)\cap A\neq\emptyset$.
Αν αυτό δεν ισχύει, τότε $B_\rho(x,\varepsilon)\cap A=\emptyset$, άρα $A\subseteq X\setminus B_\rho(x,\varepsilon)$ με το σύνολο $X\setminus B_\rho(x,\varepsilon)$ να είναι κλειστό (ως συμπλήρωμα της ανοιχτής μπάλας $B_\rho(x,\varepsilon)$ που είναι ανοιχτό σύνολο) άρα (από την υπόθεσή μας) περιέχει το σημείο x.
Αυτό είναι άτοπο εφόσον $x\in B_\rho(x,\varepsilon)$. Συνεπώς $B_\rho(x,\varepsilon)\cap A\neq\emptyset$.
Αφού αυτό αποδείχθηκε για κάθε $\varepsilon>0$ προκύπτει ότι $x\in\overline{A}$.
Έτσι $\bigcap\{F: F \text{ κλειστό}, A\subseteq F\}\subseteq\overline{A}$, επομένως $\overline{A}=\bigcap\{F: F \text{ κλειστό}, A\subseteq F\}$
Αυτό αποδεικνύει ότι το $\overline{A}$ είναι κλειστό (που έχουμε απόδειξη και διαφορετικά σε προηγούμενη πρόταση) και μάλιστα το μικρότερο κλειστό σύνολο που περιέχει το A.

(iii) Έστω $x\in\overline{A}$. Τότε $B_\rho(x,\varepsilon)\cap A\neq\emptyset$ για κάθε $\varepsilon>0$ και εφόσον $A\subseteq B$ έχουμε $B_\rho(x,\varepsilon)\cap B\neq\emptyset$ για κάθε $\varepsilon>0$.
Άρα $x\in\overline{B}$. Επομένως $\overline{A}\subseteq\overline{B}$

(iv) $\Leftarrow$) Αν $A=\overline{A}$ τότε αφού το $\overline{A}$ είναι κλειστό, θα είναι κλειστό και το A
$\Rightarrow$) Αν το A είναι κλειστό τότε περιέχεται στην

οικογένεια $\{F : F$ κλειστό $A \subseteq F\}$ και άρα
$\bigcap\{F : F$ κλειστό $A \subseteq F\} \subseteq A$, δηλαδή $\bar{A} \subseteq A$
Εφόσον ισχύει πάντα $A \subseteq \bar{A}$ έχουμε $A = \bar{A}$

(v) Εφόσον $A \subseteq A \cup B$ και $B \subseteq A \cup B$, συμπεραίνουμε (με χρήση της ii) ότι $\bar{A} \subseteq \overline{A \cup B}$ και $\bar{B} \subseteq \overline{A \cup B}$
άρα $\bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cup B}$
Επίσης εφόσον $A \subseteq \bar{A}$ και $B \subseteq \bar{B}$, προκύπτει ότι
$A \cup B \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$
Εφόσον το σύνολο $\bar{A} \cup \bar{B}$ είναι κλειστό (ως ένωση δύο κλειστών) προκύπτει (με χρήση της ii) ότι
$\overline{A \cup B} \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$, επομένως $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Παρατηρήσεις:

α) Η τελευταία ιδιότητα επεκτείνεται (με χρήση επαγωγής) ως εξής:
Αν $n \in \mathbb{N}$ και $A_1, \dots, A_n$ υποσύνολα του X
τότε $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$

β) Η προηγούμενη ιδιότητα δεν επεκτείνεται για άπειρες ενώσεις.
Π.χ. στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική.
αν $A_n = (\frac{1}{n}, 5]$, $n \in \mathbb{N}$, τότε $\overline{A_n} = [\frac{1}{n}, 5]$ $\forall n \in \mathbb{N}$,
άρα $\bigcup_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{n}, 5] = (0, 5]$ ενώ $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (0, 5]$
άρα $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} = [0, 5]$

γ) Ιδιότητα αντίστοιχη της (v) δεν ισχύει για τομές.
Ισχύει $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$ αλλά δεν ισχύει πάντα ισότητα.
Π.χ. αν $A = (0,1)$, $B = (1,2)$, τότε $A \cap B = \emptyset$
άρα $\overline{A \cap B} = \emptyset$ ενώ $\bar{A} \cap \bar{B} = [0,1] \cap [1,2] = \{1\}$

Ορισμός: Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$, ένα $x \in X$ λέγεται σημείο συσσώρευσης του συνόλου A αν για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $B_\rho(x,\varepsilon) \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$.
Το παράγωγο σύνολο ενός συνόλου A είναι το σύνολο όλων των σημείων συσσώρευσης του A, δηλαδή $A' = \{x \in X : B_\rho(x,\varepsilon) \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset \ \forall \varepsilon > 0\}$
Αν $x \in A$ και το x δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A (δηλαδή αν υπάρχει $\varepsilon > 0$, ώστε $B_\rho(x,\varepsilon) \cap A = \{x\}$), τότε το x λέγεται μεμονωμένο σημείο του συνόλου A

Παρατηρήσεις
α) Από τον ορισμό του A' για $x \in X$, έχουμε
$x \in A' \iff x \in \overline{A \setminus \{x\}}$
β) Για κάθε $A \subseteq X$ ισχύει $\overline{A} = A \cup A'$
Προφανώς $A \subseteq \overline{A}$ και $A' \subseteq \overline{A}$ προφανώς άρα $A \cup A' \subseteq \overline{A}$
Αντίστροφα, αν $x \in \overline{A}$ και $x \notin A$ τότε $A \setminus \{x\} = A$, άρα $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$ συνεπώς $x \in A'$ άρα $\overline{A} \subseteq A \cup A'$
Επομένως $\overline{A} = A \cup A'$

Παράδειγμα
Στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική θεωρούμε το $A = \{0\} \cup (4,5] \cup \{7\}$. Το σημείο 4, όπως και κάθε σημείο του συνόλου $(4,5]$ είναι σημείο συσσώρευσης του A. Τα σημεία 0 και 7, που ανήκουν στο A δεν είναι σημεία συσσώρευσης του A, δηλαδή είναι μεμονωμένα σημεία του A.
Επίσης εύκολα προκύπτει ότι για κάθε $x \notin [4,5]$ το x δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A
Επομένως $A' = [4,5]$